8. 3. ZWIĄZKI MIĘDZY FUNKCJAMI TRYGONOMETRYCZNYMI TEGO SAMEGO KĄTA

Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta

a) jedynka trygonometryczna $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

b) $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha\neq 0$

c) $ctg\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0$

d) $tg\alpha=\frac{1}{ctg\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0, \cos\alpha\neq 0$

e) $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$, $\sin\alpha\neq 0, \cos\alpha\neq 0$

Przykład 8.3.1. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych wiedząc, że

a) $\sin\alpha=\frac{4}{5};\alpha\in(0°,90°)$

Rozwiązanie	Komentarz
$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ $\left(\frac{4}{5}\right)^2+\cos^2\alpha=1$ $\frac{16}{25}+\cos^2\alpha=1$ $\cos^2\alpha=1-\frac{16}{25}$ $\cos^2\alpha=\frac{25}{25}-\frac{16}{25}$ $\cos^2\alpha=\frac{9}{25}$ $\cos\alpha=\frac{3}{5}$	Korzystając ze wzoru $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, obliczamy $\cos\alpha$
$tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $tg\alpha=\frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$	Korzystając ze wzoru $tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,obliczamy $tg\alpha$
$ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$ $ctg\alpha=\frac{1}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$	Korzystając ze wzoru $ctg\alpha=\frac{1}{tg\alpha}$ obliczamy $ctg\alpha$

b) $tg\alpha = 2; \alpha \in (0°,90°)$

Rozwiązanie	**Komentarz**
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\begin{cases} 2 = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} /\cdot \cos\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} 2\cos\alpha = \sin\alpha \\ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ (2\cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ 5\cos^2\alpha = 1 / :5 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cos\alpha \\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \cos\alpha = \frac{\sqrt{5}}{5} \end{cases}$	Wykorzystując wzory $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, budujemy układ równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$
$ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ $ctg\alpha = \frac{1}{2}$	Korzystając ze wzoru $ctg\alpha = \frac{1}{tg\alpha}$ obliczamy $ctg\alpha$

<u>Przykład 8.3.2.</u> Wiedząc, że $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1$ oblicz $tg\alpha$.

Rozwiązanie	Komentarz
$\begin{cases} \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \\ \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ 1 - \cos^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1 \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ -3\cos^2\alpha = -2 / : (-3) \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha \\ \cos^2\alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = 1 - \frac{2}{3} \\ \cos^2\alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin^2\alpha = \frac{1}{3} \\ \cos^2\alpha = \frac{2}{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{3}} \\ \cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}} \end{cases}$	Wykorzystując wzór $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ i podane w zdaniu równanie $\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha = -1$, budujemy układ równań z niewiadomymi $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$
$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $tg\alpha = \frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{1}{3}} \cdot \sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$	Wykorzystując wzór $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, obliczamy $tg\alpha$

Przykład 8.3.3. Oblicz wartość wyrażenia $\frac{\sin 40° \cdot ctg 40°}{\cos 40°}$

Rozwiązanie	Komentarz
$\frac{\sin 40° \cdot ctg 40°}{\cos 40°} =$ $= \frac{\sin 40°}{\cos 40°} \cdot ctg 40° =$	Podane wyrażenie zapisujemy w postaci iloczynu dwóch wyrażeń.
$= tg 40° \cdot ctg 40° =$	Wykorzystujemy wzór $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$,
$= \frac{1}{ctg 40°} \cdot ctg 40° = 1$	Wykorzystujemy wzór $tg\alpha = \frac{1}{ctg\alpha}$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 8.3.1. Wyznacz wartości pozostałych funkcji trygonometrycznych wiedząc,że:

a) (3pkt.) $\cos\alpha = \frac{2}{3}; \alpha \in (0°, 90°)$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości $\sin\alpha$	1
2	Podanie wartości $tg\alpha$	1
3	Podanie wartości $ctg\alpha$	1

b) (3pkt.) $ctg\alpha = 3; \alpha \in (0°, 90°)$

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości $tg\alpha$	1
2	Podanie wartości $\sin\alpha$	1
3	Podanie wartości $\cos\alpha$	1

Ćwiczenie 8.3.2. (1pkt.) Sinus kąta α jest dwa razy większy od kosinusa tego kąta.
Oblicz tangens α.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości $tg\alpha$	1

Ćwiczenie 8.3.3. (4pkt.) Dane są liczby

$$a = \frac{\cos 77° \cdot tg 77°}{\sin 77°}$$

$$b = \cos 45° \cdot \cos^2 54° + \sin 45° \cdot \sin^2 54°$$

$$c = \cos 10° \cdot \sqrt{1 + tg^2 10°}$$

Sprawdź, która z tych liczb jest wymierna.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie wartości liczby a.	1
2	Podanie wartości liczby b.	1
3	Podanie wartości liczby c.	1
4	Wskazanie , która z liczb a, b, c jest liczbą wymierną .	1